PJU Portal Jurnal Unimor

JSLK4 (1) 1-4
JurnalSaintekLahanKering (2021)
International Standard of Serial Number 2622-1020

JSLK Jurnal Saintek Lahan Kering

Penyelesaian Masalah Infiltrasi Dari Saluran Datar Periodik Menggunakan *Dual Reciprocity Boundary Element Method* Dengan Fungsi Basis Radial

Faustianus Luan[a], Elinora Naikteas Bano[b]

[a]*Fakultas Pertanian, Universitas Timor, Kefamenanu, TTU – NTT, Indonesia, email:* luanfausty57@gmail.com
[b]*Fakultas Pertanian, Universitas Timor, Kefamenanu, TTU – NTT, Indonesia, email:* iranaikteas@gmail.com

Artikel Ini Telah Diseminarkan Pada Seminar Nasional Saintek Unimor 2019

Article Info

Article history:
Received 2 Juni 2021
Received in revised form16 Juni 2021
Accepted 20 Juni 2021

DOI:
https://doi.org/10.32938/slk.v4i1.1375

Keywords:
Infiltrasi,
Persamaan Helmholtz Termodifikasi,
FBR,
DRBEM.

Abstrak

Penelitan ini mengkaji mengenai solusi numerik masalah infiltrasi dari saluran datar periodik menggunakan metode *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (*DRBEM*) dengan fungsi basis radial polinomial. *DRBEM* merupakan pengembangan dari Metode Elemen Batas, digunakan untuk penyelesaian PDP pada bidang fisika matematis dan teknik. *DRBEM* mempunyai peranan penting untuk memperoleh solusi persamaan Helmholtz dengan mendeskripsikan relasi *reciprocal* antara solusi fundamental persamaan Laplace dan solusi yang akan dicari. Selanjutnya, suku yang memuat integral lipat dua (*double integral*) dalam perhitungannya didekati dengan fungsi basis radial, agar didapat persamaan yang hanya memuat integral batas. Tujuan dari solusi numerik yang diperoleh selanjutnya dibandingkan dengan solusi analitik yang diperoleh Batu, agar diperoleh solusi yang akurat dari fungsi basis radial polinomial untuk penyelesaian masalah infiltrasi tersebut. Model matematika yang digunakan adalah persamaan Richards dan transformasi Kirchoff serta variabel-variabel tak berdimensi menjadi persamaan Helmholtz termodifikasi. Hasil perhitungan solusi numerik telah memberikan hasil bahwa *DRBEM* dengan fungsi basis radial polinomial tersebut untuk jumlah *boundary element* hasil diskritisasi dan jumlah titik kolokasi *interior* pada ($N = 200, L = 400$) dan ($N = 225, L = 400$) diperoleh nilai pendekatan *(error)* dari keenam titik di region, menunjukkan semakin besar nilai *N* maka semakin kecil *error*nya. Sehingga untuk *FBR* $\rho(r) = 1 + r^3 + r^4$, dan $\rho(r) = 1 + r^3 + r^5$ yang memiliki *error* terkecil adalah $\rho(r) = 1 + r^3 + r^5$ artinya mendekati *FBR* yang digunakan oleh Batu, yakni $\rho(r) = 1 + r^2 + r^3$. Dengan demikian, disimpulkan bahwa semakin banyak ruas garis hasil diskritisasi pada batas region, solusi numerik akan mendekati solusi analitiknya.

1. Pendahuluan

Masalah kekeringan di Indonesia merupakan persoalan yang memiliki dampak yang cukup signifikan, terutama dalam bidang pertanian. Kekeringan yang berlebihan tentu akan berakibat buruk sebab air merupakan salah satu unsur kehidupan mutlak yang tersedia untuk kelangsungan hidup. Mencermati dampak yang disebutkan di atas, maka masalah kekeringan yang terjadi bukan semata-mata karena faktor alamiah saja, namun kekeringan umumnya diperparah penyebab lainnya yaitu terjadinya pergeseran daerah aliran sungai (DAS). Efek dari perubahan ini adalah sistem resapan air (*infiltrasi*) di dalam tanah menjadi terganggu dan akhirnya menyebabkan kekeringan.

Ada beberapa hal yang bisa dilakukan sebagai upaya untuk menanggulangi kekeringan yang terjadi di Indonesia, salah satunya adalah membangun atau merehabilitasi jaringan sistem irigasi yang baik dan relevan sesuai kondisi alam serta wilayah resapan air. Oleh karena itu, sistem resapan air dipandang perlu untuk mengatasi masalah lahan pertanian dengan intensitas air yang kurang. Salah satu sistem yang dianggap perlu ditinjau dari proses penyediaan, pemberian, pengelolaan, dan pengaturan air adalah sistem irigasi permukaan (*surfaceirrigation system*) yang merupakan metode pemberian air yang paling awal dikembangkan oleh (Nuchsin, 2014). Selanjutnya, model matematika yang digunakan adalah persamaan Richard dan transformasi Kirchoff serta variabel tak berdimensi. Persamaan Richard akan ditransformasikan menjadi persamaan Helmhotz termodifikasi. Untuk memperoleh solusi numerik persamaan Helmholtz termodifikasi akan menggunakan metode numeric Dual Reciprocity Boundary Element Method (*DRBEM*) sebagai salah satu solusi pendekatan untuk menyelesaikan solusi numerik masalah infiltrasi dari saluran datar periodik.

Metode numerik *DRBEM* merupakan pengembangan dari *MEB*. *MEB* adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang digunakan pada bidang fisika matematis dan teknik. Metode *DRBEM*, dipandang lebih efektif dari pada Boundary Element Method (BEM) untuk penyelesaian masalah infiltrasi dari saluran datar periodik. Adapun beberapa fungsi basis radial polinomial yang digunakan dalam penulisan ini, antara lain: $\rho(r) = 1 + r + r^5$, $\rho(r) = 1 + r^3 + r^4$, dan $\rho(r) = 1 + r^2 + r^3$. yaitu untuk mengkaji solusi numerik masalah infiltrasi dari saluran datar periodik dengan menggunakan metode numerik *DRBEM* untuk penyelesaian masalah infiltrasi dari saluran datar periodik. Solusi numerik yang diperoleh, kemudian akan dibandingkan dengan Batu (1978), agar diperoleh *FBR* polinomial yang paling sesuai dalam menyelesaikan masalah infiltrasi tersebut. Oleh karena berkembangnya dunia komputasi, maka menjadi satu alasan diperlukan bantuan program Matlab terutama untuk penyelesaian proses perhitungan dalam menentukan solusi numerik yang akurat dengan metode numerik *DRBEM*.

2. Metode Penelitian

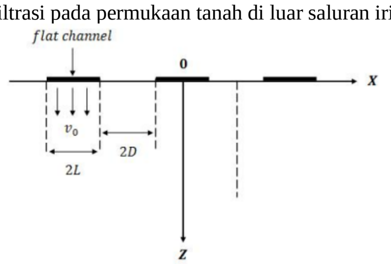
Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur dengan menggunakan simulasi MATLAB. Dalam peneyelesaiannya dibangun dari Persamaan Richards. Persamaan Richards ini kemudian ditransformasikan menjadi Persamaan Helmholtz termodifikasi. Selanjutnya dengan *DRBEM*, solusi numerik dari Persamaan Helmholtz termodifikasi diperoleh.

a. Formulasi Masalah

Berikut akan diberikan formulasi masalah infiltrasi dari saluran irigasi yang berbentuk saluran flat. Selanjutnya akan ditentukan domain dari saluran irigasi di atas.

Dalam menentukan domain dan syarat batas masalah infiltrasi dari saluran datar periodik, perlu diberikan asumsi-asumsi tertentu sebagai berikut:

a) Panjang penampang saluran irigasi adalah sama yaitu $2L$.
b) Jarak antar saluran adalah sama yaitu $2D$, atau jarak antar titik tengah saluran yang berdekatan adalah sama yaitu $2\,(L + D)$.
c) Saluran sangat panjang dan ada sebanyak tak berhingga saluran, sehingga diperoleh dalam bentuk dua dimensi.
d) Saluran selalu dipenuhi air.
e) Infiltrasi pada permukaan saluran irigasi konstan yaitu v_0.
f) Tidak ada infiltrasi pada permukaan tanah di luar saluran irigasi.



Gambar 1.Saluran irigasi jalur (Solekhudin, 2013 dan Lobo, 2008)

Diasumsikan fluks pada saluran dan pada permukaan tanah di luar saluran, masing-masing dengan v_0 dan 0. Karena simetri maka cukup diperhatikan region semi infinite, yaitu $0 \le X \le L + D$ dan $0 \le Z \le \infty$. Selanjutnya diasumsikan tidak ada fluks yang melewati $X = 0$ dan $X = L + D$. Hal ini diasumsikan $\frac{\partial\Theta}{\partial X} \to 0$ dan $\frac{\partial\Theta}{\partial Z} \to 0$ ketika $Z \to 0$.

b. Persamaan Fundamental

Dalam mempelajari masalah infiltrasi, model matematika yang digunakan dimulai dari Hukum Darcy, persamaan Richards dalam bentuk persamaan diferensial parsial non linear, kemudian ditransformasikan menjadi persamaan diferensial parsial linear sampai terbentuknya persamaan Helmholtz termodifikasi.

1) Hukum Darcy

Bentuk umum persamaan Hukum darcy dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$q = K\frac{\Delta H}{L} \tag{1}$$

dimana q adalah *fluks*, K adalah *Hidraulic Conductivity*, adalah *hydraulic head gradien* dan L adalah panjang tabung berisi tanah.

Selanjutnya, Philip (1968)

$$q = -K\nabla H \tag{2}$$

Dengan ∇H adalah gradien tiga dimensi *hydraulic head*. Sementara $K\nabla H$ adalah hasil kali antara skalar K dan ∇H vektor tiga dimensi.

2) Persamaan Richards

Persamaan Richards merupakan pengembangan dari Hukum Darcy yang merepresentasikan perpindahan air dalam media berpori tidak jenuh. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut,

$$\frac{\partial\theta}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}\right) \tag{3}$$

dengan $K(\theta)$ adalah *hydraulic conductivity* yang berdimensi $\frac{L}{T}$, ψ adalah suction potensial yang berdimensi L dan Z koordinat ruang vertikal dengan arah positif ke bawah dan dapat merepresentasikan perpindahan air dalam tanah tak jenuh dalam dua dimensi.

Persamaan (3), berbentuk persamaan diferensial non linear yang penyelesaiannya sangat sulit untuk diselesaikan. Agar mempermudah perhitungan pada persamaan tersebut maka diperlukan trasformasi untuk mengubah persamaan (3) ke bentuk yang lebih mudah untuk diselesaikan. Salah satunya dengan transformasi yang diberikan oleh Kirchoff dengna menggunakan model exponensial konduktifitas hidrolik yang diberikan oleh Garner (1958), yaitu untuk mengubah persamaan Richards ke bentuk persamaan Helmholtz.
Transformasi Khirchoff diberikan dalam bentuk,

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\psi} K(s)\, ds \tag{4}$$

dengan Θ merupakan *Matric Flux Potential* (MFP). Selanjutnya, diberikan model exponensial dari *hydraulic conductivity*, yaitu

$$K = K_o e^{\alpha\psi},\ \ \alpha > 0 \tag{5}$$

dengan α adalah sebuah parameter dan K_o adalah konduktifitas hidraulik pada tanah jenuh. Selanjutnya, menggunakan Persamaan (5), maka persamaan Richards ditransformasi menjadi persamaan linear, yaitu

$$\frac{\partial\theta}{\partial T} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2} - \alpha\frac{\partial\Theta}{\partial Z} \tag{6}$$

Diasumsikan bahwa masalah infiltrasi air pada saluran irigasi jenuh, artinya untuk perubahan waktu yang terjadi kondisi infiltrasi air tersebut tetap atau tidak bergantung waktu. Akibatnya, $\frac{\partial\theta}{\partial T} = 0$, sehingga persamaan (6) menjadi

$$\nabla^2\Theta = \alpha\frac{\partial\Theta}{\partial Z} \tag{7}$$

Lebih lanjut, digunakan variabel-variabel tak berdimensi yakni

$$x = \frac{\alpha}{2}X;\ \ Z = \frac{\alpha}{2}Z;\ \ \Phi = \frac{\pi\Theta}{v_0 L};\ \ u = \frac{2\pi}{v_0\alpha L}U;\ \ v = \frac{2\pi}{v_0\alpha L}V;\ \ f = \frac{2\pi}{v_0\alpha L}F \tag{8}$$

dengan v_0 adalah fluks awal dan L adalah setengah panjang saluran irigasi.
Menggunakan persamaan (4), (5) dan (8), maka persamaan Richards dapat ditransformasi menjadi:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial^2 z} = \phi \tag{9}$$

Persamaan (9) merupakan persamaan Helmholtz termodifikasi yang merepresentasikan infiltrasi air pada saluran irigasi jenuh (dalam tanah homogen). Dapat diperoleh juga transformasi dari *flux* normal yaitu:

$$f = -e^z\frac{\partial\phi}{\partial x}n_1 + \left(e^z\left(\phi - \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right)n_2 \tag{10}$$

Diperoleh definisi turunan normal

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \phi n_2 - f e^z \tag{11}$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan (9) berupa persamaan Helmholtz termodifikasi dengan variabel tak berdimensi ϕ. Nilai ϕ pada persamaan (9), dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan Metode Elemen Batas atau *DRBEM* yang selanjutnya solusi numerik yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi analitik yang diperoleh Batu.

3)Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM)

Dalam metode DRBEM akan digunakan teorema divergensi untuk memperoleh persamaan integral dalam memecahkan persamaan Helmholtz yang dimodifkasi. Dalam penerapan metode DRBEM teorema divergensi diaplikasikan dua kali.

Solusi Persamaan Helmholtz Dua Dimensi dengan DRBEM

Diberikan bentuk umum persamaan Helmholtz dua dimensi

$$\nabla^2\phi + \alpha(x,y)\phi = g(x,y), \qquad (x,y)\epsilon R \tag{12}$$

Dengan syarat batas
$\phi = f_1(x,y)$, untuk $(x,y) \in C_1$
$\frac{\partial\phi}{\partial n} = f_2(x,y)$, untuk $(x,y) \in C_2$
Dengan f_1 dan f_2 merupakan fungsi yang ditentukan serta C_1 dan C_2 didefinisikan sebagai dua buah kurva yang tidak berpotongan sedemikian sehingga $C_1 \cup C_2 = C$ serta α dan g merupakan fungsi-fungsi dari variabel x dan y. Karena cukup sulit menentukan solusi fundamental persamaan (12) dan tidak tunggal, (Katsikadelis, 2002) maka salah satu alternatif untuk menyelesaikan persamaan di atas yakni dengan menggunakan metode numerik *DRBEM.* Dalam penerapannya *DRBEM* tidak memerlukan solusi fundamental persamaan Helmholtz secara langsung tetapi cukup dengan solusi fundamental persamaan Laplace. Jadi dapat dimisalkan, $\alpha(x,y) = 0$, dan $g(x,y) = 0$ maka persamaan (12) berbentuk persamaan Laplace dua dimensi.

Formulasi Integral

Solusi fundamental persamaan Laplace dua dimensi dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$\Phi(x,y,\xi,n) = \frac{1}{4\pi}\ln[(x-\xi)^2 + (y-n)^2]$$

Jika $\phi_1(x,y)$ dan $\phi_2(x,y)$merupakan sembarang solusi-solusi persamaan poisson pada domain R yang dibatasi kurva tertutup sederhana C, dan diberikan persamaan poisson dua dimensi $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \sigma$ maka diperoleh:

$$\int_C \left(\phi_2(x,y)\frac{\partial\phi_1(x,y)}{\partial n} - \phi_1(x,y)\frac{\partial\phi_2(x,y)}{\partial n}\right) ds = \iint_R \phi_2(x,y)\sigma_1(x,y) - \phi_1(x,y)\,\sigma_2(x,y)\, dx\, dy \tag{13}$$

merupakan *relasi reciprocal* persamaan poisson.

Persamaan Integral dari persamaan Helmholtz

Persamaan (13) dapat digunakan untuk menurunkan persamaan integral dari persamaan Helmholtz dua dimensi dengan dipilih, $\phi_1 = \Phi(x,y,\xi,n)$ dan $\phi_2 = \phi(x,y)$ dengan $\Phi(x,y,\xi,n)$ merupakan solusi fundamental persamaan Laplace yang diberikan dan $\phi(x,y)$ adalah solusi persamaan Helmholz yang akan dicari pada domain $R \cup C$. Jadi diperoleh persamaan integral batas persamaan Helmholtz adalah

$$\lambda(\xi,n)\phi(\xi,n) = \int_C \left(\phi_2(x,y)\frac{\partial\Phi(x,y,\xi,n)}{\partial n} - \Phi(x,y,\xi,n)\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial n}\right) ds + \iint_R \Phi(x,y,\xi,n)\,[g(x,y) - \alpha\phi(x,y)]\, dx\, dy$$

dengan

$$\lambda(\xi,n)\phi(\xi,n) = \begin{cases} 0, & \text{Jika}(\xi,n) \notin (R \cup C) \\ \frac{1}{2}, & \text{Jika}(\xi,n) \text{ berada pada bagian kurva mulus } C \\ 1, & \text{Jika}(\xi,n) \in R \end{cases}$$

Pendekatan Integral Domain

Dalam mengaproksimasi integral domain, diperlukan suatu fungsi yang disebut dengan fungsi basis radial (FBR) yang disimbolkan dengan ρ yang berpusat di (a,b) adalah sebuah fungsi yang berbentuk $\rho(x,y;a,b) = G(r(x,y;a,b)$, dengan $r(x,y;a,b) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Fungsi $\rho(x,y;a,b)$disebut sebagai fungsi yang hanya bergantung pada jarak antara (x,y) dan (a,b). Selanjutnya, akan didekati $g(x,y) - \alpha(x,y)\phi(x,y)$dengan jumlahan fungsi basis radial yang berpusat di titik kolokasi tersebut, (Ang, 2007).

$$g(x,y) - \alpha(x,y)\phi(x,y) \approx \sum_{m=1}^{N+L}\beta^m\rho(x,y;a^m,b^m) \tag{14}$$

Dengan β^m suatu koefisien yang akan dicari nilainya, dan $\rho(x,y;a^m,b^m)$ merupakan fungsi basis radial dengan titik pusat (a^m,b^m). Untuk pendekatan yang baik titik kolokasi yan dipilih sebagian terletak di daerah domain R dan sebagian terletak pada batas domain C.
Keberhasilan penerapan metode numerik *DRBEM* sangat bergantung pada seberapa akurat atau tidaknya pada pemilihan jenis fungsi basis radial polinomial. Oleh karena itu, pada penelitian ini diplih dua FBR polinomial sekaligus mewakili jenis polinomial lainnya untuk membandingkan nilai errornya dengan FBR yang digunakan WT. Ang (2007) pada penyelesaian masalah infiltrasi dari saluran datar periodik menggunakan DRBEM. Diantaranya,
$\rho(x,y;a,b) = 1 + r(x,y;a,b) + r(x,y;a,b)^5$
$\rho(x,y;a,b) = 1 + r(x,y;a,b)^3 + r(x,y;a,b)^4$
$\rho(x,y;a,b) = 1 + r(x,y;a,b)^2 + r(x,y;a,b)^3$
dengan melakukan pendekatan integral pada domain R pada bentuk

$$\iint_R \Phi(x,y,\xi,n)\,[g(x,y) - \alpha\phi(x,y)]\, dx\, dy$$

dan mengaproksimasi integral domain diperlukan suatu fungsi berupa fungsi basis radial polinomial seperti yang telah ditentukansebelumnya, maka diperoleh

$$\iint_R \Phi(x,y,\xi,n)\,[g(x,y) - \alpha\phi(x,y)]\, dx\, dy = \left(\sum_{j=1}^{N+L}\left[\sum_{m=1}^{N+L}\omega^{mj}\,\Psi(\xi,n;\ a^m,b^m)\right][g(a^j,b^j) - \alpha(a^j,b^j) - \phi(a^j,b^j)]\right)$$

Merupakan pendekatan integral domain (*double integral*), dengan persamaan

$$\Psi(\xi,n;\ a^m,b^m) = \lambda(\xi,n)\chi(\xi,n;\ a^m,b^m) + \int_C \left(\Phi(x,y;\xi,n)\frac{\partial_\chi(x,y;\ a^m,b^m)}{\partial n} - \chi(x,y;\ a^m,b^m)\frac{\partial\Phi(x,y;\xi,n)}{\partial n}\right) ds$$

dengan

$$\chi(x,y;\ a^m,b^m) = \frac{1}{4}r^2(x,y;\ a^m,b^m) + \frac{1}{9}r^3(x,y;\ a^m,b^m) + \frac{1}{49}r^7(x,y;\ a^m,b^m)$$
$$\chi(x,y;\ a^m,b^m) = \frac{1}{4}r^2(x,y;\ a^m,b^m) + \frac{1}{25}r^5(x,y;\ a^m,b^m) + \frac{1}{36}r^6(x,y;\ a^m,b^m)$$
$$\chi(x,y;\ a^m,b^m) = \frac{1}{4}r^2(x,y;\ a^m,b^m) + \frac{1}{16}r^4(x,y;\ a^m,b^m) + \frac{1}{25}r^5(x,y;\ a^m,b^m)$$

untuk $m = 1,2,\ldots,N+L$
Selanjutnya, dengan menggunakan prosedur *DRBEM* dan bantuan aplikasi /program MATLAB untuk memperoleh solusi numerik yang mendekati solusi eksaknya maka diperlukan jumlah ruas garis diskritisasi yang cukup banyak dalam pemilihannya.

3. Hasil dan Pembahasan

a. Solusi analitik masalah infiltrasi untuk kasus dari saluran datar periodik

Penyelesaian solusi analitik untuk kasus sumber aliran periodik pada saluran datar adalah

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2} = \alpha\frac{\partial\Theta}{\partial Z} \tag{15}$$

dengan syarat-syarat batas diketahui.
$V = V_1(X,0) = v_0$; untuk, $0 \le X \le L, z = 0$
$V = V_1(X,0) = v_0$; untuk, $L \le X \le L + D, z = 0$

$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$; untuk, $0 \le Z \le \infty, X = 0$
$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$; untuk, $0 \le Z \le \infty, X = L + D$
$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$; untuk, $0 \le X \le L + D, Z = \infty$

Penyelesaian analitik pada saluran datar periodik dan dstribusinya pada region dapat diketahui bahwa setengah dari *cross section parameter* (L) saluran adalah 50 cm dan setengah dari jarak ujung-ujung dua saluran (D) adalah 50 cm, dan parameter empirik untuk *Prima Clay Loam* (α) adalah 0,014 cm^{-1}.

Selanjutnya, solusi analitik persamaan Helmholtz untuk masalah infiltrasi yang diperoleh Batu, secara umum ditulis dalam bentuk

$$\theta = \frac{\pi}{2(x_0 + x_1)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{n} \sin\left(\frac{0{,}35\, n\pi}{x_0 + x_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{x_0 + x_1}\right) \qquad (16)$$

dengan

$$I_n = \frac{\exp\left(Z\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{0{,}7}\right)^2}\right]\right)}{0{,}35\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{0{,}7}\right)^2}\right]} \qquad (17)$$

Untuk memperoleh penyelesaian analitik masalah di atas, maka terlebih dahulu dihitung konstanta pada variabel non dimensional x_0 dan x_1, yaitu

$$x_0 = \frac{\alpha L}{2} = \frac{0{,}014}{2} = 0{,}35;$$

$$x_1 = \frac{\alpha D}{2} = \frac{0{,}014}{2} = 0{,}35;$$

Dengan mensubstitusi nilai x_0 dan x_1 pada persamaan (16) diperoleh penyelesaian analitik sebagai berikut

$$\theta = \frac{\pi}{2(x_0 + x_1)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{n} \left(\frac{n\pi x_0}{x_0 + x_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{x_0 + x_1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2(0{,}35 + 0{,}35)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{n} \left(\frac{0{,}35 n\pi}{0{,}35 + 0{,}35}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{0{,}35 + 0{,}35}\right)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\theta = \frac{\pi}{1{,}4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{n} \left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{0{,}7}\right)$$

dengan

$$I_n = \frac{\exp\left(Z\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{0{,}7}\right)^2}\right]\right)}{0{,}35\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{0{,}7}\right)^2}\right]}$$

Berdasarkan perhitungan limit untuk $Z \to \infty$ dapat diperoleh

$$\lim_{x\to\infty} \theta = \frac{\pi}{1{,}4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lim_{x\to\infty} I_n}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{0{,}7}\right)$$

dengan

$$\lim_{x\to\infty} I_n = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp\left(Z\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{0{,}7}\right)^2}\right]\right)}{0{,}35\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{0{,}7}\right)^2}\right]} = 0$$

dengan demikian diperoleh nilai θ, yaitu $\theta = 2{,}242457$.

b. Solusi numerik dengan metode *DRBEM* untuk masalah infiltrasi dari saluran datar periodic

Penyelesaian masalah infiltrasi dari saluran datar periodik dengan menggunakan metode numerik *Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM)* dengan fungsi basis radial, diantaranya: $\rho(r) = 1 + r + r^5$, $\rho(r) = 1 + r^3 + r^4$, dan $\rho(r) = 1 + r^2 + r^3$ (WT.Ang, 2002), dapat dilakukan dengan bantuan program Matlab agar diperoleh *error* nilai hampiran yang mendekati solusi analitik tersebut. Perhatikan tabel di bawah ini,

Tabel 1. Solusi Numerik A, B dan Solusi analitik
(N=200, L=400)

Titik (x, z)	Solusi Numerik A	Solusi Numerik B	Nilai Analitik
(0.1, 0.8)	2.268385	2.189673	2.243764
(0.1, 2.0)	2.385470	2.386777	2.243995
(0.1, 3.2)	2.746571	3.269906	2.243995
(0.4, 0.8)	2.224405	2.149584	2.244502
(0.4, 2.0)	2.274197	2.227063	2.243995
(0.4, 3.2)	2.332160	2.369248	2.243995

Pada tabel 1 di atas, menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh berupa solusi numerik dan solusi analitik untuk pemilihan *RBF* $\rho(r) = 1 + r + r^5$ dan $\rho(r) = 1 + r^3 + r^4$. Untuk pengambilan diskritisasi pada *boundary element* dan *interior*nya dapat dilakukan dengan pengambilan nilai berupa ($N = 200, L = 400$) atau total diskritisasi pada *N* dan *L* secara keseluruhan adalah sebanyak 600 titik kolokasi. Dari hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa solusi numerik *A* dan *B* masih semakin besar terutama pada nilai Z yang dipilih sehingga solusi numerik yang diperoleh pun semakin besar.

Selanjutnya pada tabel 2, akan ditentukan pula nilai pendekatan (*error*) dari masing-masing *RBF* polinomial (dapat dilihat pada tabel 2).

Tabel 2. Error Solusi Numerik A, B
($N = 200, L = 400$)

Titik (x, z)	Error A	Error B
(0.1, 0.8)	0.024621	0.054091
(0.1, 2.0)	0.141475	0.142782
(0.1, 3.2)	0.502576	1.025911
(0.4, 0.8)	0.020097	0.094918
(0.4, 2.0)	0.030202	0.016933
(0.4, 3.2)	0.088165	0.125253

Berdasarkan tabel 2, diperoleh solusi numerik dari masalah infiltrasi saluran datar periodik dengan menggunakan metode numerik *DRBEM* untuk $\rho(r) = 1 + r + r^5$ dan $\rho(r) = 1 + r^3 + r^4$, yang dapat memberikan hasil dengan nilai pendekatannya (nilai *error*) seperti yang terlihat pada tabel di atas. Hal ini, menunjukkan bahwa dalam perhitungan solusi analitik dan solusi numerik dengan diskritisasi pada *boundary element* dan jumlah kolokasi interior untuk pengambilan nilai ($N = 200, L = 400$) masih dikatakan cukup besar nilai *error*nya, bila dilihat dari keenam titik (x, z) tersebut. Sehingga untuk tahap selanjutnya, pengambilan nilai diskritisasi berupa *N* dan L akan diperbanyak dengan *FBR* yang masih tetap sama.

Berikut ini, akan tentukan nilai pendekatan untuk kedua *FBR* ($\rho(r) = 1 + r + r^5$ dan $\rho(r) = 1 + r^3 + r^4$) dengan diskritisasi pada batas dan interior sebanyak (*N=225, L=400*). Maka, diperoleh solusi

Tabel 3. Solusi Numerik A, B dan Solusi analitik
($N = 225, L = 400$)

Titik (x, z)	Solusi Numerik A	Solusi Numerik B	Solusi Analitik
(0.1, 0.8)	2.269562	2.202572	2.243764
(0.1, 2.0)	2.384780	2.331822	2.243995
(0.1, 3.2)	2.744837	2.968075	2.243995
(0.4, 0.8)	2.224928	2.156795	2.244502
(0.4, 2.0)	2.275604	2.247951	2.243995
(0.4, 3.2)	2.335603	2.375284	2.243995

Untuk solusi numerik dan solusi analitik dari *RBF* ($\rho(r) = 1 + r + r^5$ dan $\rho(r) = 1 + r^3 + r^4$), dan pengambilan diskritisasi ($N = 225, L = 400$) dengan total diskritisasi secara keseluruhan sebanyak 625 titik kolokasi, hal ini menujukkan bahwa nilai dari solusi numerik *A* maupun *B* yang diperoleh masih semakin besar. Sehingga perlu diketahui bahwa semakin besar nilai *Z* yang dipilihb maka solusi numeric yang diperoleh pun semakin besar. Selanjutnya, dicari nilai pendekatan atau *error* dari masing-masing solusi numerik di atas dapat ditunjukkan pada tabel 4.

Tabel 4. Error Solusi Numerik A, B
($N = 225, L = 400$)

Titik (x, z)	Error A	Error B
(0.1, 0.8)	0.025798	0.041192
(0.1, 2.0)	0.140785	0.087827
(0.1, 3.2)	0.500842	0.724080
(0.4, 0.8)	0.019574	0.087707
(0.4, 2.0)	0.031609	0.003956
(0.4, 3.2)	0.091608	0.131289

Berdasarkan hasil diskritisasi yang dilakukan pada *boundary element* dan *interior* dengan pengambilan nilai ($N = 200, L = 400$) dan (*N=225, L=400*), dapat disimpulkan bahwa masalah infiltrasi dari saluran datar periodik menggunakan metode numerik *DRBEM* dengan pemilihan fungsi basis radial $\rho(r) = 1 + r + r^5$ dan $\rho(r) = 1 + r^3 + r^4$, diperoleh nilai pendekatan/ hampiran (*error*) seperti yang ditunjukkan dalam tabel yakni untuk nilai **Error A** dan **Error B,** seperti yang terlihat dalam tabel 2, dan tabel 4, memberikan keterangan bahwa untuk kedua *FBR* polynomial dengan hasil yang diperoleh masih relatif sama besarnya, namun pada $\rho(r) = 1 + r + r^5$ memberikan nilai *error* terkecil bila dibandingkan dengan $\rho(r) = 1 + r^3 + r^4$.

Selanjutnya, berikut in adalah tabel penyelesaian solusi analitik dan numerik serta nilai *errornya* untuk $\rho(r) = 1 + r^2 + r^3$. Maka diperoleh,

Tabel 5. Error Solusi Numerik A, B dan Solusi Analitik
($N = 200, L = 400$)

Titik (x, z)	Solusi Analitik	Solusi Numerik	Error
(0.1, 0.8)	2.243764	2.295431	0.051667
(0.1, 2.0)	2.243995	2.243455	0.000540
(0.1, 3.2)	2.243995	2.239289	0.004706
(0.4, 0.8)	2.244502	2.230822	0.013680

(0.4, 2.0)	2.243995	2.242369	0.001626
(0.4, 3.2)	2.243995	2.239071	0.004924

Tabel 5, menunjukkan nilai *error* yang diperoleh dalam penyelesaian masalah infiltrasi menggunakan metode numerik *DRBEM* dengan *FBR* polinomial $\rho(r) = 1 + r^2 + r^3$, dengan diskritisasi pada *boundary element* dan *interior* dengan (*N=200, L=400*). Berikut ini, tabel solusi numerik dengan diskritisasi *(N=225, L=400).*

Tabel 6. Error Solusi Numerik A, B dan Solusi Analitik $(N = 225, L = 400)$

Titik (x, z)	**Solusi Analitik**	**Solusi Numerik**	**Error**
(0.1, 0.8)	2.243764	2.295424	0.051660
(0.1, 2.0)	2.243995	2.243584	0.000441
(0.1, 3.2)	2.243995	2.239946	0.004049
(0.4, 0.8)	2.244502	2.230832	0.013670
(0.4, 2.0)	2.243995	2.242487	0.001508
(0.4, 3.2)	2.243995	2.239683	0.004312

Berdasarkan tabel 6, menunjukkan bahwa semakin besar nilai *boundary*nya, maka semakin pula kecil nilai pendekatan (nilai *error)* yang diperoleh. Sehingga, dari ketiga *FBR* memberikan hasil atau nilai *error* dari masing-masing *FBR* berdasarkan pendiskritisasian pada titik kolokasi baik (*boundary element dan interior*) yang dipilih dalam penyelesaian masalah infiltrasi dari saluran datar periodik dengan nilai *error* yang bervariasi. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa dari ketiga *FBR* yang telah dicari penyelesaiannya baik *FBR* yang telah dipakai dalam penelitian-penelitian termasuk Batu (1978), *RBF polinomial* dengan $\rho(r) = 1 + r + r^5$ pun layak digunakan dalam penyelesaian masalah-masalah infiltrasi yang dicari solusi dengan metode numerik *DRBEM.*

4. Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1) Dalam penulisan ini, digunakan beberapa fungsi basis radial untuk penyelesaian masalah *infiltrasi* dari saluran datar periodik dengan menggunakan metode numerik *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM), yakni untuk mengetahui serta membandingkan fungsi basis radial mana yang nilai *error* atau nilai pendekatannya paling kecil atau lebih akurat selain fungsi bais radial yang digunakan oleh Batu (1978). Model matematika yang digunakan dimulai dari pembentukkan persamaan Richards dalam bentuk persamaan diferensial non linear, kemudian ditransformasi menjadi persamaan diferensial linear, sampai terbentuknya persamaan Helmholtz termodifikasi.
2) Berdasarkan hasil perhitungan solusi analitik dan solusi numerik yang diperoleh, dapat memberikan hasil bahwa fungsi basis radial polinomial tersebut dengan jumlah *boundary element*, hasil diskritisasi dan jumlah titik kolokasi *interior* pada $(N = 200, L = 400)$ dan $(N = 225, L = 400)$ diperoleh nilai pendekatan *(error)* dari keenam titik diregion, menunjukkan bahwa semakin besar nilai *N* yang dipilih maka semakin kecil nilai *error*nya dan sangat bergantung pada pemilihan fungsi basis radial (*RBF*). Dengan demikian, untuk ketiga *FBR* polinomial tersebut yang memiliki *error* terkecil terdapat pada *RBF* $\rho(r) = 1 + r + r^5$. Dengan demikian, semakin banyak ruas garis hasil diskritisasi pada batas region, solusi numerik akan mendekati solusi analitiknya.

Pustaka

Ang, W.T. 2007, *Beginner's Course in Boundary Element Methods*, Universal Publishers, Boca Raton, USA.

Batu, V, 1978, Steady Ilfiltration from Single and Periodik Strip Source, Soil Sci. Soc. Am. J, 42, pp. 544-549.

C.S. Chen, C. A. Brebbia, and H. Power. *Dual reciprocity method* using compactly supported radial basis functions. Comm. Num. Meth. Eng., 15: 137–150, 1999.

Katsikadelis, J. T. 2002, *Boundary Elements Theory and Applications*, Elsevier Science Ltd.

Lobo, M. 2008, *Boundary Element Methods* for A Class of Infiltration Problems, PhD Tesis, Adelaide University.

Nuchsin, P., 2014, PedomanTeknisPengembanganJaringanIrigasi, Direktorat Jenderal Sarana dan Prasarana Pertanian, Kementrian Pertanian.

Philip, J. R. (1968). Absorption and infiltration in two and three dimensional systems. In: “Proc. UNESCO Symp. Water in the Unsaturated Zone,” Wageningen, The Netherlands.

Solekhudin,I. 2013, *Dual Reciprocity Boundary Element Method* for water infiltration Froblems in irrigation, PhD Tesis, NationalInstitude of Education, Nanyang Technological University.

Solekhudin,I., Ang, K. C. 2013, *Dual Reciprocity Boundary Element Method* for Steady infiltration Froblems, ANZIAM J.54:171-180